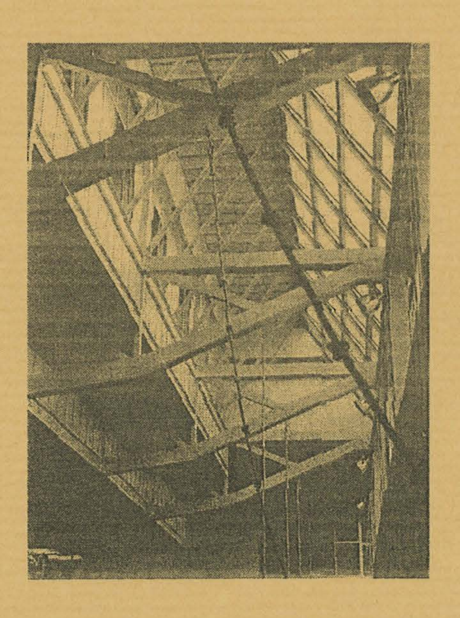
VIGAS TRIANGULADAS
Y
CERCHAS

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-16-06

VIGAS TRIANGULADAS
Y
CERCHAS

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-16-06

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

1 Área
16 Autor
06 Ordinal de cuaderno (del autor)

Vigas trianguladas y cerchas (4ª Edición)

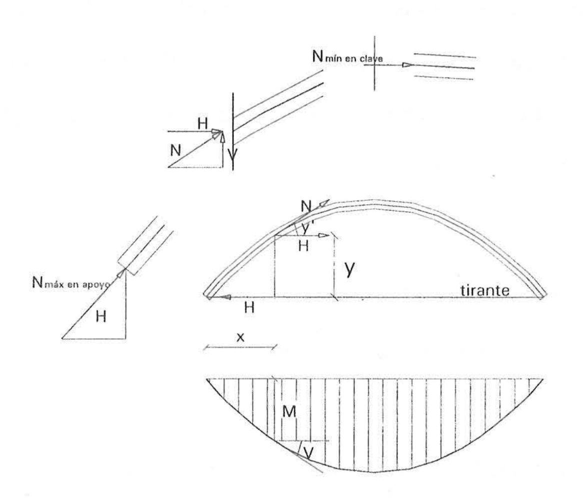
Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Daniel Álvarez Morcillo.
CUADERNO 53.04 / 1-16-06
ISBN: 84-9728-056-3
Depósito Legal: M-54385-2002

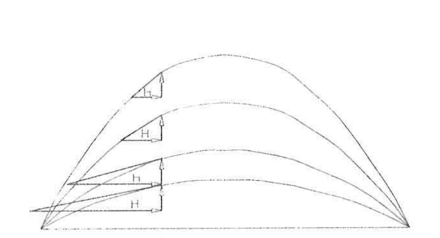
VIGAS TRIANGULADAS Y CERCHAS

NOCIONES PREVIAS

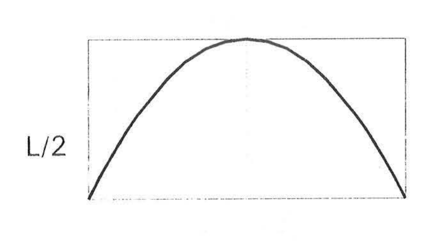
DEL ARCO A LA VIGA DE CORDONES PARALELOS

Dada una ley de momentos en la que a cada punto *x* corresponde un momento M, la pendiente es V = dM/dx —donde V es el esfuerzo cortante, suma de las fuerzas a la izquierda proyectadas sobre la perpendicular al tirante—.

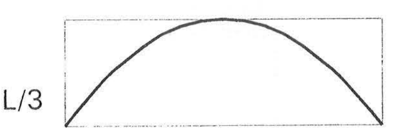




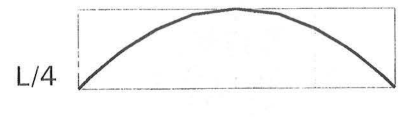
El arco es una solución de trazado automático cuyo problema es que sólo sirve para un rango de formas de carga. La forma del arco es necesariamente semejante a la de la gráfica de momentos, de manera que en todo punto M = y·H, siendo la componente horizontal de la reacción H constante en cualquier corte.



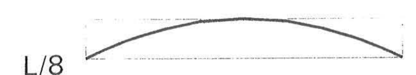
Establecido H, los valores de *y* se calculan. La forma del arco queda determinada sin ningún otro margen de libertad.



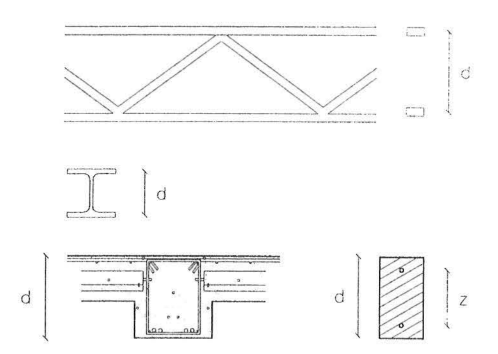
Los arcos son *soluciones eficaces* —no las mejores posibles pero sí cercanas— siempre que haya bastante espacio disponible para la estructura.



El menor consumo de material en un arco se produce para proporciones entre 2:1 y 3:1.



Cuando el espacio disponible para la estructura es más esbelto, una solución de arco implica unos valores de reacción horizontal H muy fuertes. A partir de proporciones 4:1 resulta más eficaz utilizar todo el rectángulo L x d disponible.

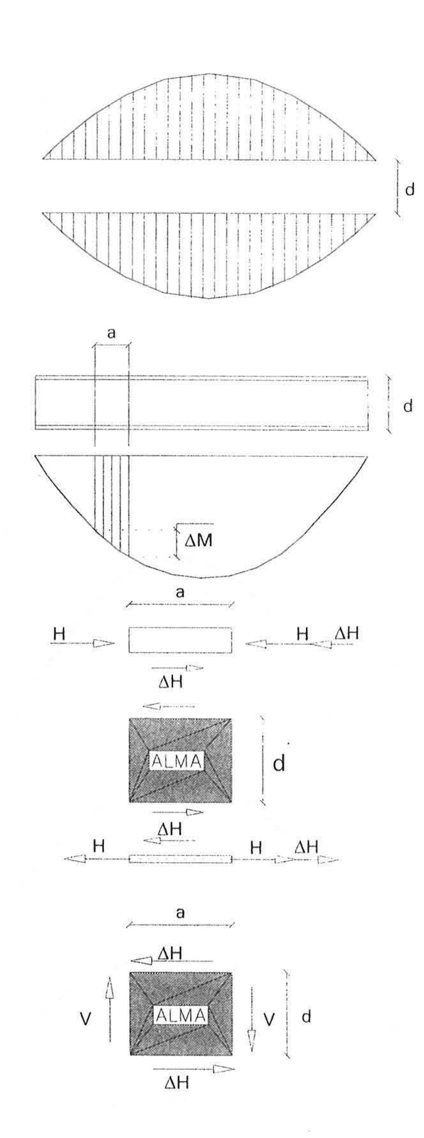


LA NECESIDAD DEL ALMA

Así se llega a la idea de la viga llamada de **cordones paralelos** o de **canto constante**. En esta viga, **al ser *d* constante, H es variable**: su variación debe seguir la ley de la gráfica de momentos:

$$M = H \cdot d$$

La variación de H implica la existencia de un **alma** de la viga que al tiempo que completa el equilibrio de fuerzas horizontales resiste el esfuerzo cortante V.



Para analizar el funcionamiento de una *viga de cordones paralelos* de canto —distancia entre ejes de cordones—**d** sometida a una ley variable de momentos, se corta un trozo de longitud ***a*** con el fin de estudiar el equilibrio local.

El equilibrio horizontal de fuerzas de los cordones es imposible sin la existencia de un **alma** que mediante el **rasante** equilibre el DH de diferencia entre los cortes del cordón..

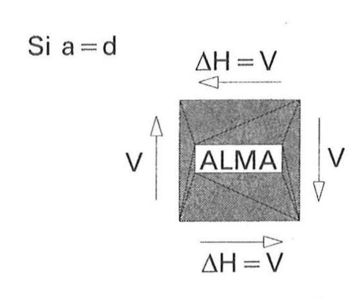
El equilibrio de momentos del alma exige que la relación entre el **rasante** y el **cortante** verifique:

$$V \cdot a = \Delta H \cdot d \qquad \text{es decir,} \qquad \Delta H = V \cdot \frac{a}{d}$$

Por otra parte, partiendo de la gráfica de momentos, se deduce la misma fórmula:

Recordando que $dM = V \cdot dx, \quad V \cdot a = \Delta M$

Por otra parte al ser $M = H \cdot d, \quad \Delta H \cdot d = \Delta M$

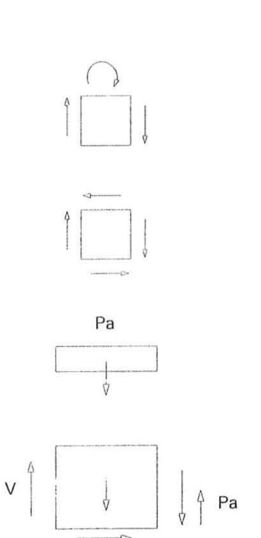


Cuando se corta una rebanada de viga de longitud *d*, es decir, si se corta un trozo de alma cuadrada, el cortante es igual al rasante:

$$\text{Si } a = d \Rightarrow \quad \Delta H = V$$

El equilibrio horizontal de los cordones requiere la existencia de un **esfuerzo rasante** DH en el alma. El equilibrio de momentos del alma establece una relación entre el **rasante** y el **cortante**, que son dos aspectos de la misma solicitación, más compleja que la tracción y la compresión.

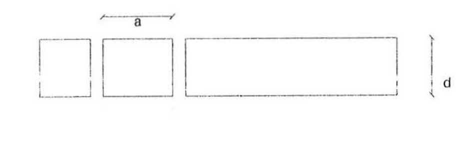
En efecto:



Un cortante aislado no es posible ya que hace girar al elemento; es necesario completar el equilibrio con el rasante.

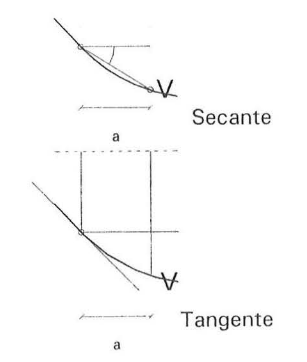
Se hace la simplificación de considerar el mismo T en los dos cortes, lo que no es cierto más que si son muy próximos. De hecho existe un momento adicional:

$$\Delta M = P \cdot a \cdot \frac{a}{2} = P \cdot \frac{a^2}{2}$$



Cuando $a \to 0$ $\quad P \cdot \frac{a^2}{2}$ disminuye más rápidamente que V·a. Realmente sería más preciso hablar de V como el *cortante medio* en el tramo:

$$V = \Delta M / a$$



V tiende a la tangente cuando *a* tiende a 0 y es aproximadamente el valor de la secante a la gráfica o de la tangente en el centro del intervalo *a*.

ORGANIZACIÓN DEL ALMA

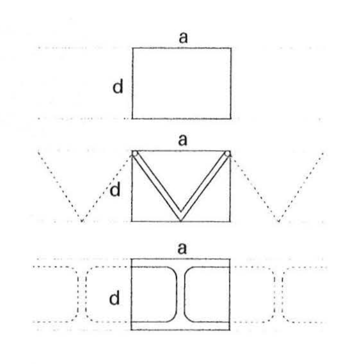
VIGAS DE ALMA TRIANGULADA

Hay tres formas de organizar físicamente el alma de una viga:

Alma llena.

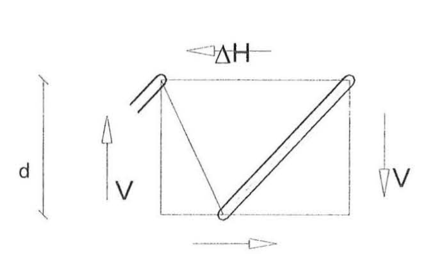
Alma triangulada.

Alma de montantes.

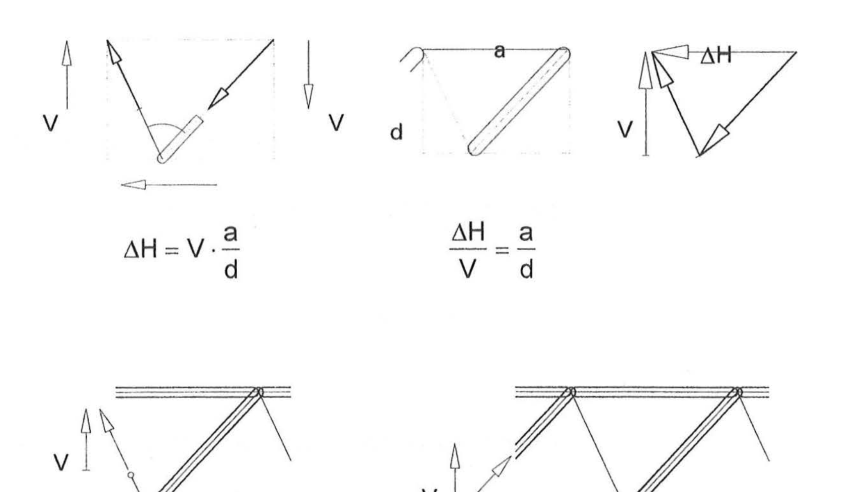


Lo que sigue tratará de las vigas de **alma triangulada**, que se componen de un sistema de barras alternativamente comprimidas y traccionadas que resisten el **cortante** y proporcionan el **rasante** necesario para que la solicitación horizontal H de los cordones pueda ser variable.

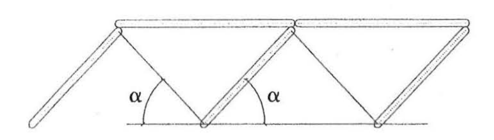
Un conjunto de dos barras inscrito en un rectángulo de dimensiones **a·d** debe por una parte resistir el cortante V, lo que condiciona la solicitación de cada una de las barras, y por otra, el conjunto de ambas barras debe proporcionar una componente horizontal ΔH = V· *a*/d, lo que puede comprobarse en la figura por semejanza de triángulos:

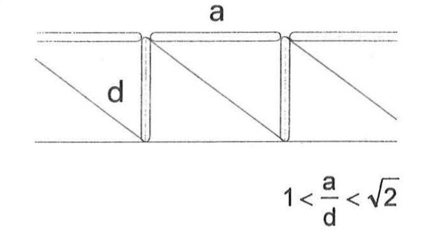


$$\Delta H = V \cdot \frac{a}{d}$$



$$\Delta H = V \cdot \frac{a}{d} \qquad \frac{\Delta H}{V} = \frac{a}{d}$$





$1 < \frac{a}{d} < \sqrt{2}$

Las vigas trianguladas, —salvo situaciones excepcionales como los casos en que la limitación de rigidez es poco estricta, o las condiciones de extremo son distintas de las de apoyo simple—, cabe esperar que tengan esbelteces entre 6 y 15.

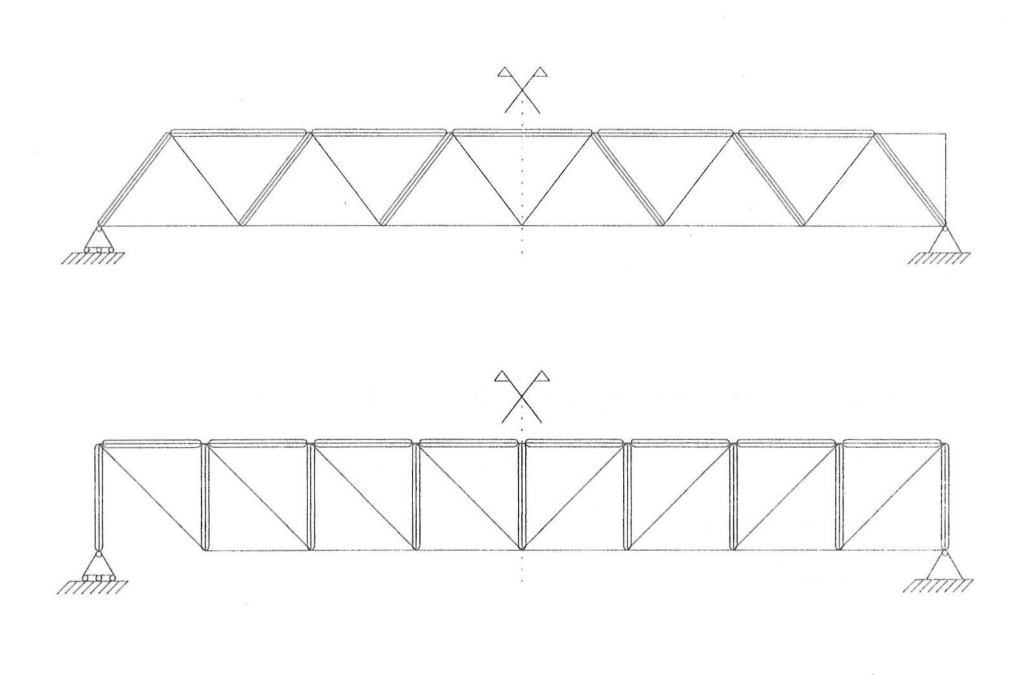
Las triangulaciones son de dos tipos básicos:

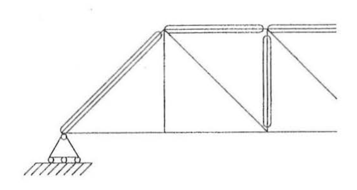
1. **Triangulación simétrica**

2. **Triangulación de montantes verticales y diagonales** —tiene la ventaja de reducir la longitud y la solicitación de las barras comprimidas—.

En la viga completa se ven así:

las barras comprimidas se dibujan con doble línea, las traccionadas en línea simple y las innecesarias de puntos.





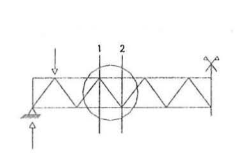
Colocar la primera barra de forma que esté comprimida puede ser ventajoso.

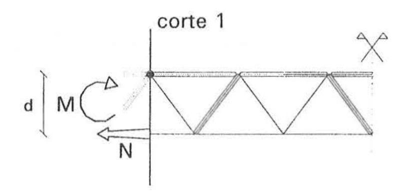
CÁLCULO DE SOLICITACIONES

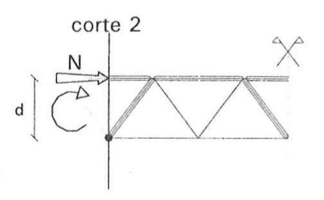
El cálculo de solicitaciones se hace determinando los esfuerzos en los cordones mediante la gráfica de momentos y en el alma mediante la de cortantes. —En la práctica, salvo en el caso de grandes vigas, basta generalmente dimensionar los cordones con el momento máximo y las diagonales con el cortante máximo—.

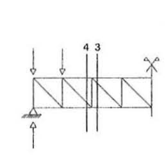
a) SOLICITACIONES EN LOS CORDONES

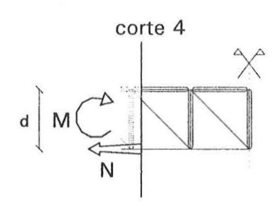
Para hallar los esfuerzos en cada tramo de los cordones basta dar cortes que pasen por el nudo opuesto para eliminar las incógnitas del resto de las barras:

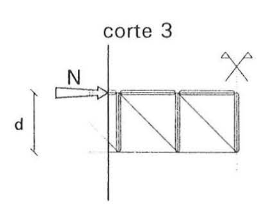






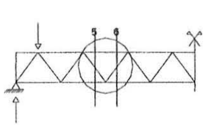


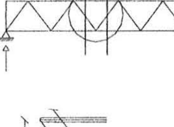




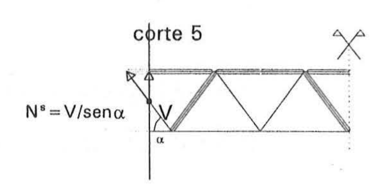
b) SOLICITACIONES EN LAS DIAGONALES

La solicitaciones en los cordones no tienen componente vertical; el cortante sólo puede ser equilibrado por la componente vertical de las diagonales:



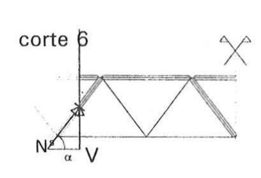


$\frac{N_s}{V} = \frac{s}{d}$



(tracción +)
siendo s la longitud de la diagonal

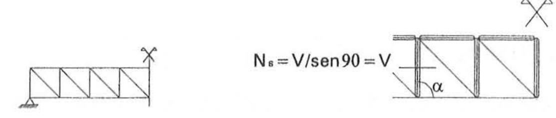
$N_s = V \cdot \frac{s}{d}$



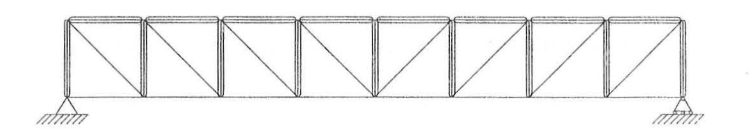
(compresión –)

$N_s = \frac{V}{\text{sen}\alpha}$

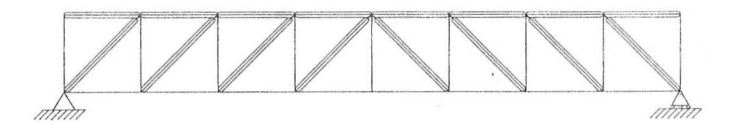
Cuando hay montantes verticales:



El sentido de la solicitación en los montantes depende del trazado de las diagonales:



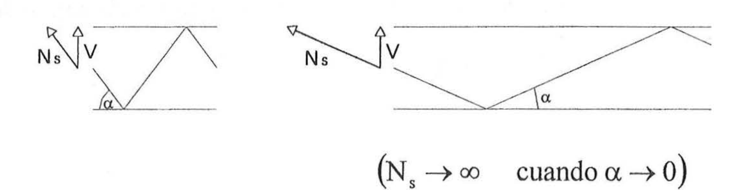
Montantes comprimidos y diagonales traccionadas:



Montantes traccionados y diagonales comprimidas

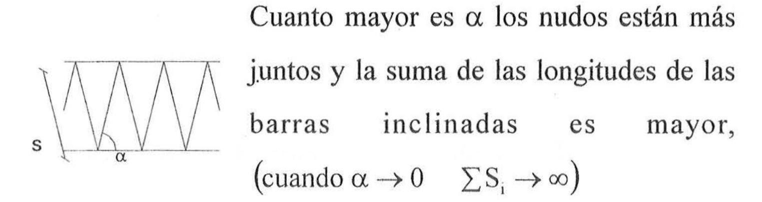
TRAZADO DE TRIANGULACIONES

— El cortante V es resistido por la triangulación cuanto más horizontal sea la barra inclinada, mayor será su solicitación.



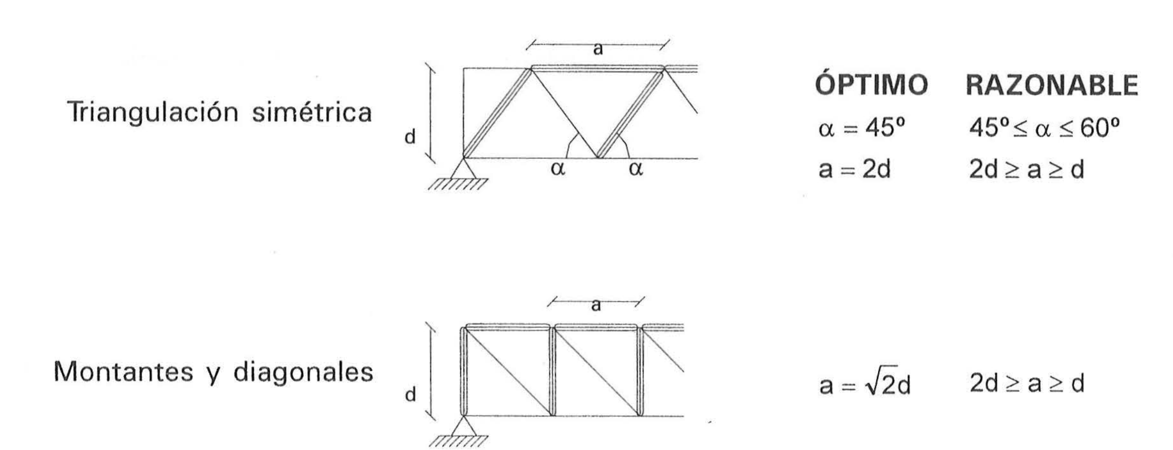
$(N_s \rightarrow \infty \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0)$

— La longitud total de la triangulación de la viga depende de α.



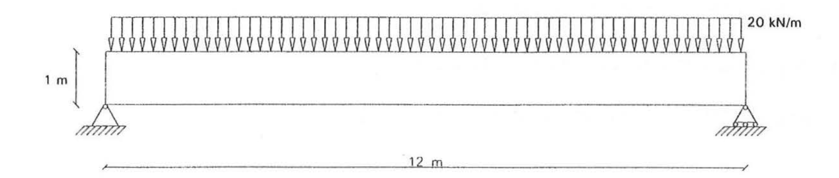
Cuanto mayor es α los nudos están más juntos y la suma de las longitudes de las barras inclinadas es mayor, $(\text{cuando } \alpha \rightarrow 0 \quad \sum S_i \rightarrow \infty)$

Entre ambos extremos hay unos trazados óptimos teóricos y unos intervalos razonables en los que el material a emplear en la triangulación difiere poco del teóricamente mínimo:

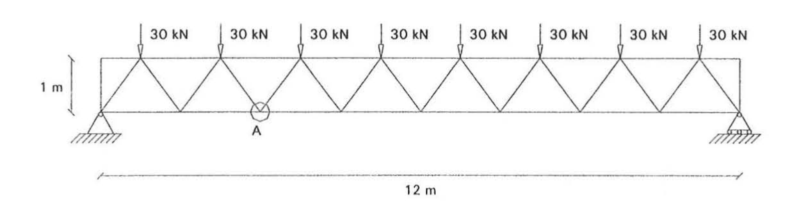


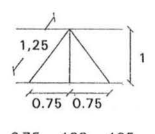
	ÓPTIMO	RAZONABLE
Triangulación simétrica	$\alpha = 45^\circ$ $a = 2d$	$45^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ $2d \geq a \geq d$
Montantes y diagonales	$a = \sqrt{2}d$	$2d \geq a \geq d$

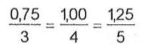
Ejemplo numérico:

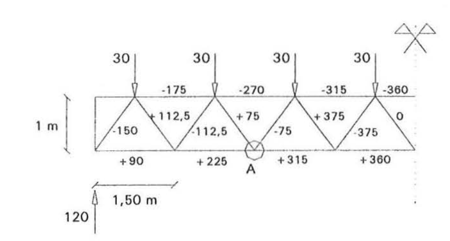


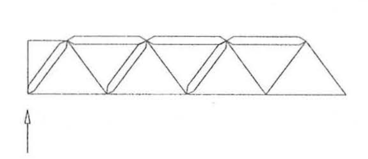
Puede comprobarse el equilibrio del nudo A:









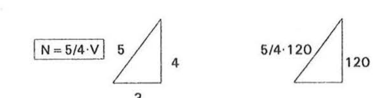


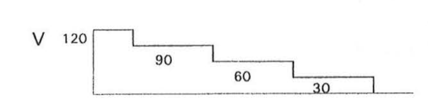
1.- Cálculo de reacciones

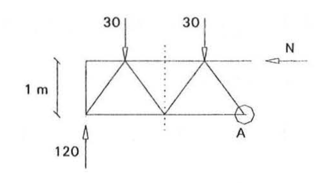
$$R_1 = R_2 = \frac{30 \times 8}{2}$$

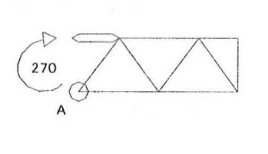
2.- Diagramas de cortantes y momentos

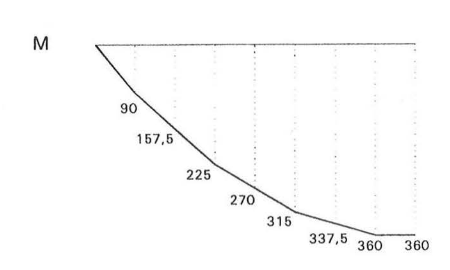
3.- Corte por el nudo A

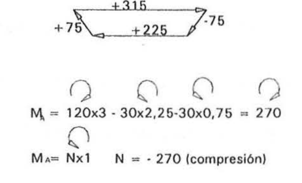












$M_A = 120 \text{x} 3 - 30 \text{x} 2{,}25 - 30 \text{x} 0{,}75 = 270$

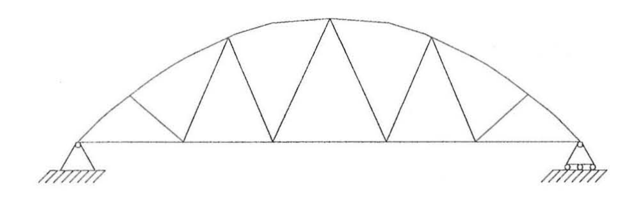
$M_A = N \text{x} 1 \quad N = -270$ (compresión)

4.- Cálculo de solicitaciones en el resto de barras

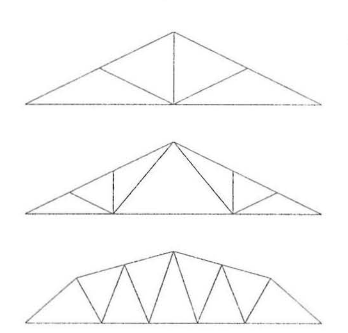
ARCOS TRIANGULADOS. CERCHAS Y VIGAS

La viga de cordones paralelos supone el caso extremo de no adaptación de la estructura a la gráfica de momentos.

Si triangulamos un arco puede funcionar como viga para asumir las diferencias entre el antifunicular de las cargas reales y el de la forma del arco.

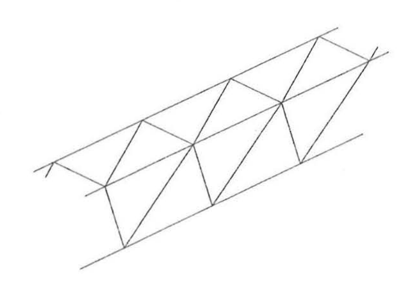


Existen soluciones intermedias conocidas genéricamente como **cerchas** que tienen canto variable, no antifunicular:



Genéricamente, cerchas, vigas trianguladas y arcos triangulados se conocen como **estructuras trianguladas planas** —también las hay espaciales que no se tratan en este texto— .

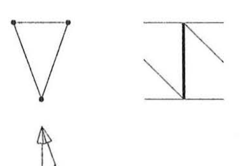
SUSTENTACIÓN E ISOSTATISMO



La primera cuestión relevante para cualquier estructura triangulada es el **isostatismo**:

Si la estructura es isostática pueden determinarse las solicitaciones a partir del esquema y dimensionar estrictamente las secciones de las barras, lo que da una doble ventaja: por una parte la sencillez del proceso de análisis; por otra, que pueden dimensionarse estrictamente las barras.

Si la estructura es **hiperestática** es preciso dimensionar previamente las barras y aunque pueden hacerse varios ciclos para ajustar un dimensionado estricto, el proceso es complejo.



En una viga xxx la solicitación de las barras inclinadas debe sumar la de la viga plana

Si la estructura es **hipostática**, no tiene forma fija sino que depende del sistema de acciones en cada momento —es el caso de un cable—.

Para comprobar el isostatismo hay una regla fácil aunque no segura:

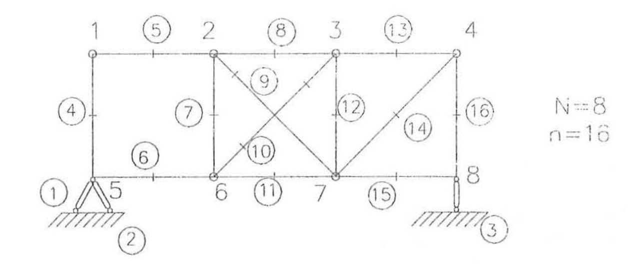
Contando como barras las condiciones de sustentación expresadas en bielas:

apoyo simple	= 1 biela
articulación	= 2 bielas
empotramiento	= 3 bielas

En toda estructura triangulada plana isostática, el número de barras n es doble del de nudos N ⇒ n = 2·N

—en el caso de estructuras espaciales n = 3·N—

- Si n>2N la estructura **es hiperestática**
- Si n<2N la estructura **es hipostática**
- Si n=2N la estructura **puede ser isostática** pero no lo es necesariamente.



Se cumple la condición n=2N pero no es una estructura sino un mecanismo.

La condición n=2N es pues necesaria pero no suficiente y no es fácil establecer una condición de suficiencia fácil de aplicar.

La condición de isostatismo es fácil de entender:
Cada nudo permite plantear dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas equivalentes a que cierre el sumatorio:

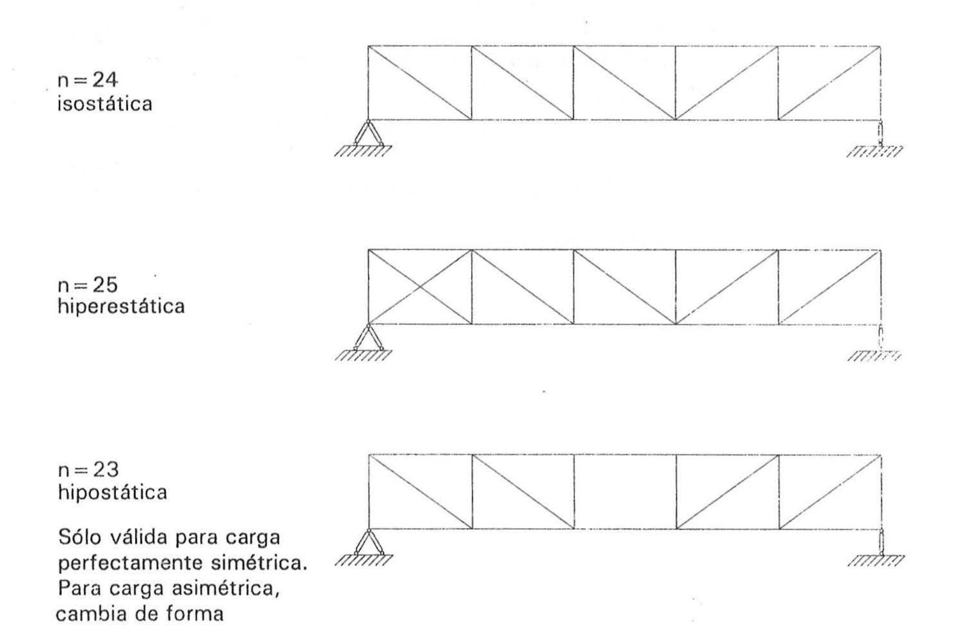
$$\sum X = 0$$
$$\sum Y = 0$$

La solicitación de cada barra es una incógnita.

Si n>2N faltan ecuaciones y hay que acudir a condiciones de deformación.

Si n < 2N sobran ecuaciones y el sistema sólo es viable si se cumplen unas determinadas condiciones de forma.

En todos los casos N=12



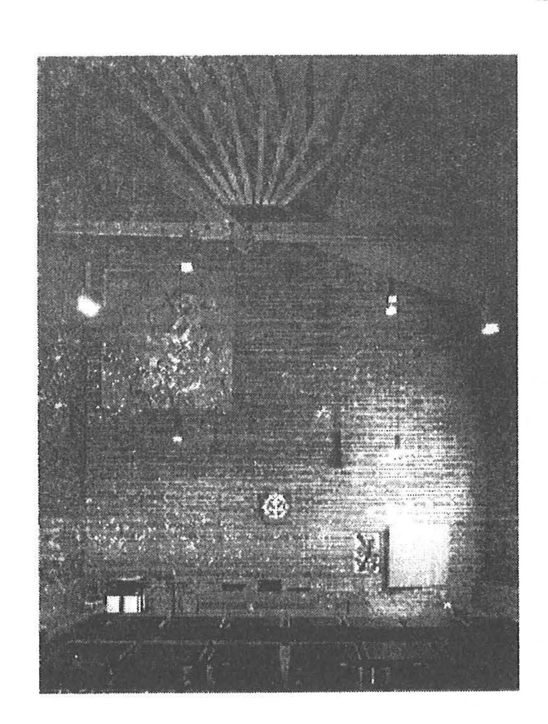
CÁLCULO DE SOLICITACIONES. CREMONA

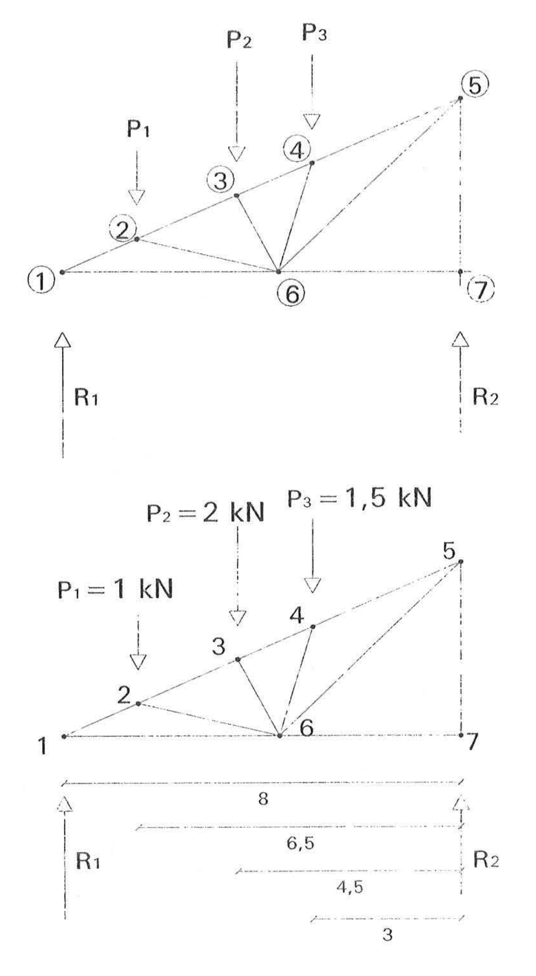
La forma más sistemática de calcular las solicitaciones en una cercha isostática es el método de **cremona**, que no es más que una forma ordenada de comprobar el equilibrio de los nudos.

- Los nudos de la estructura deben ser recorridos buscando siempre nudos con dos solicitaciones de barra desconocidas. Dentro de cada nudo las barras y las fuerzas deben a su vez ser recorridos de forma sistemática.

EJEMPLO:

Dimensionado en madera. Cercha del Ayuntamiento de Saytnätsalo.





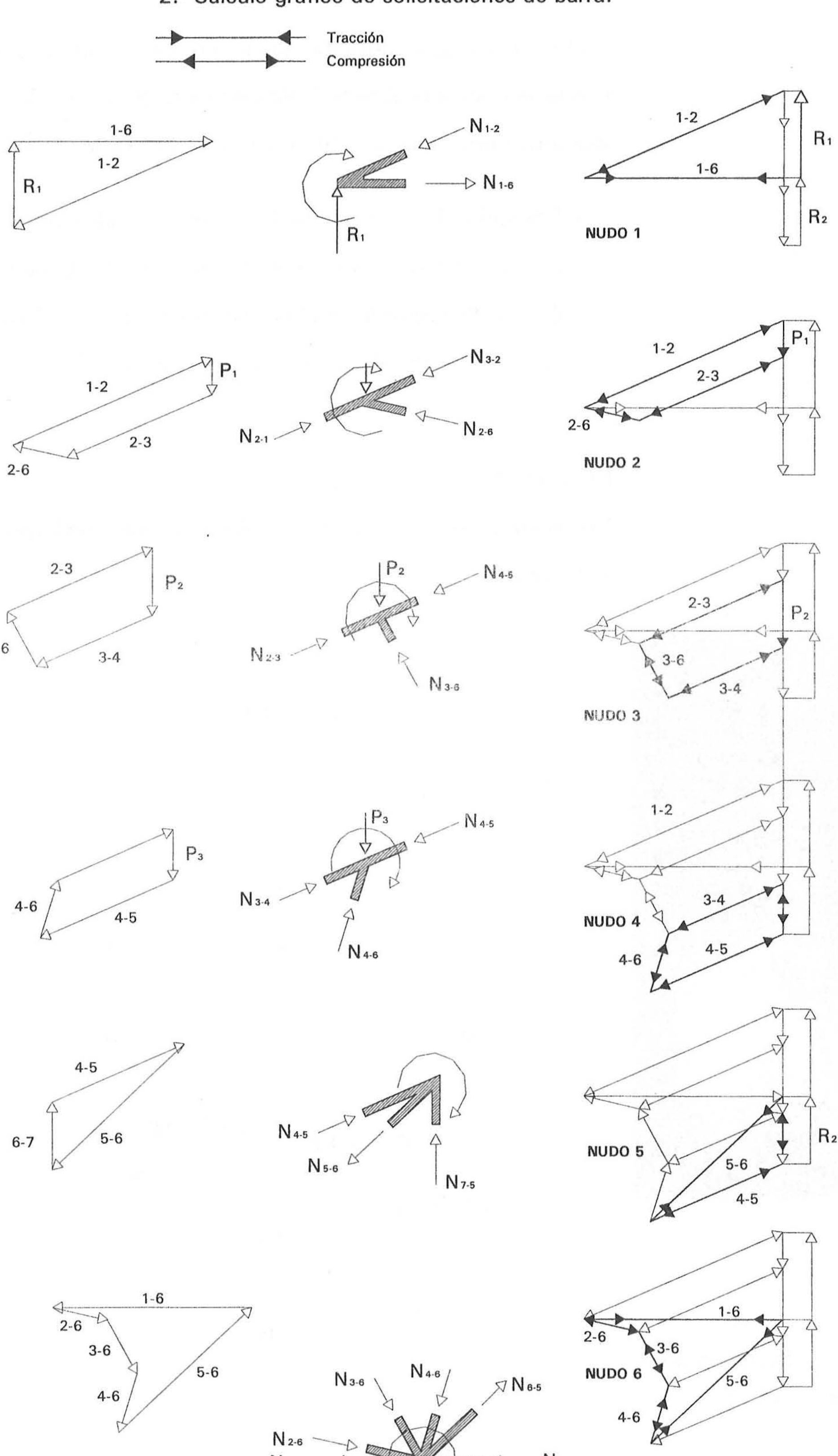
1. – Cálculo analítico de reacciones

$R_1 \cdot 8 = 1 \cdot 6{,}5 + 2 \cdot 4{,}5 + 1{,}5 \cdot 3$

$R_1 = 2{,}5$ kN

$R_2 = 4{,}5 - 2{,}5 = 2$ kN

2.- Cálculo gráfico de solicitaciones de barra.



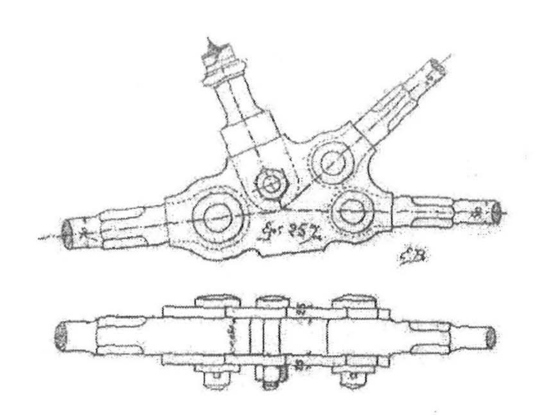
CONSTRUCCIÓN

Una barra articulada requiere una unión en el extremo que permita una completa libertad de giro.

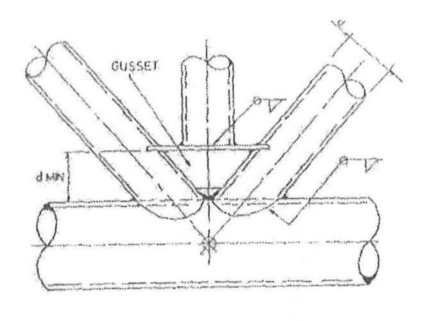
Las estructuras trianguladas reales se construyen de la forma más sencilla posible, lo que implica que generalmente los nudos distan de permitir giros y con frecuencia son completamente rígidos.

No obstante los momentos de extremo que aparecen son pequeños ya que sólo pueden existir en la medida en que el cambio de geometría debido a la deformación requiere la modificación de los ángulos relativos de las barras.

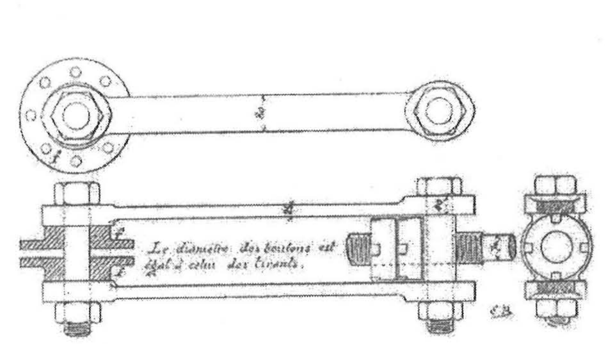
La práctica demuestra que el análisis de una viga triangulada con un modelo de nudos articulados conduce a un diseño suficientemente seguro para cualquier solución de nudo.



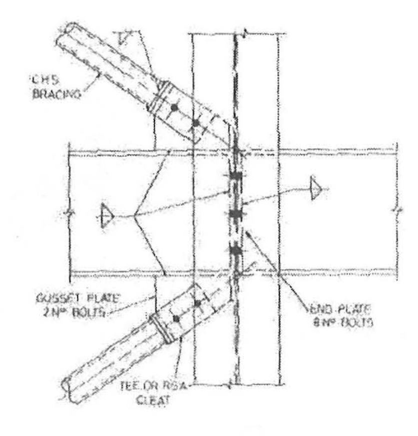
Ensamble de tirantes



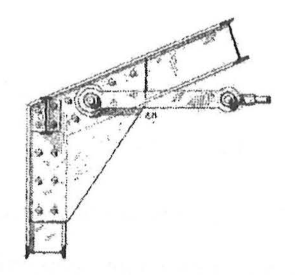
Detalles típicos de nudos metálicos actuales

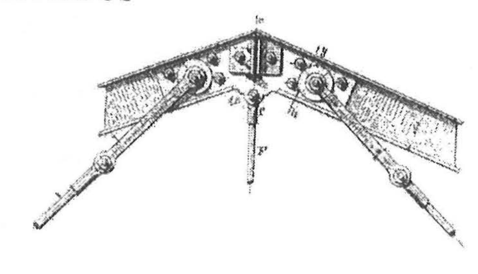


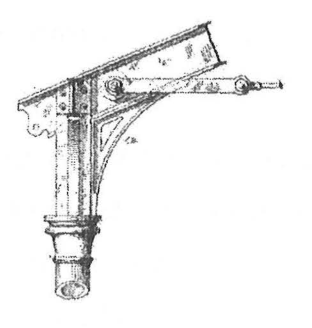
Estribo en dos piezas

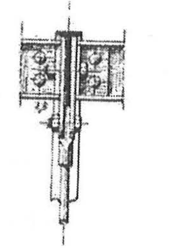


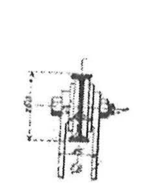
DETALLES DE NUDOS

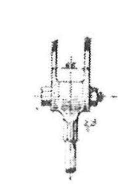




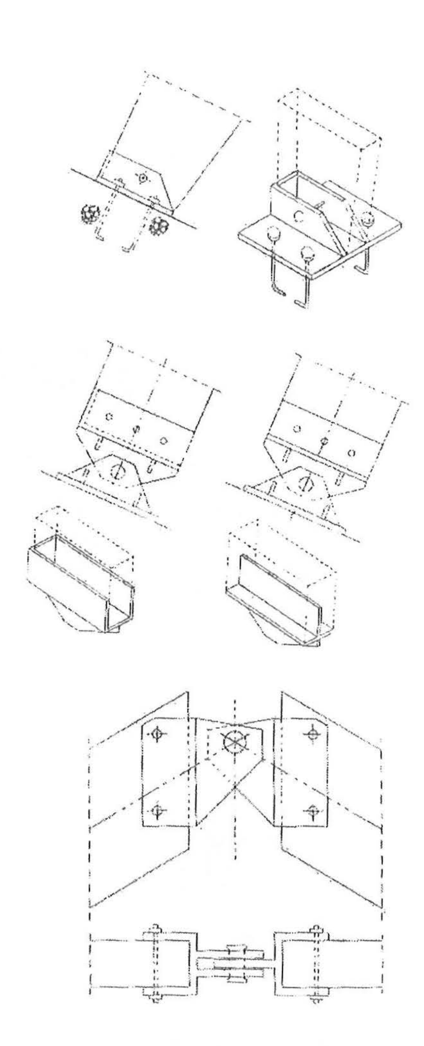


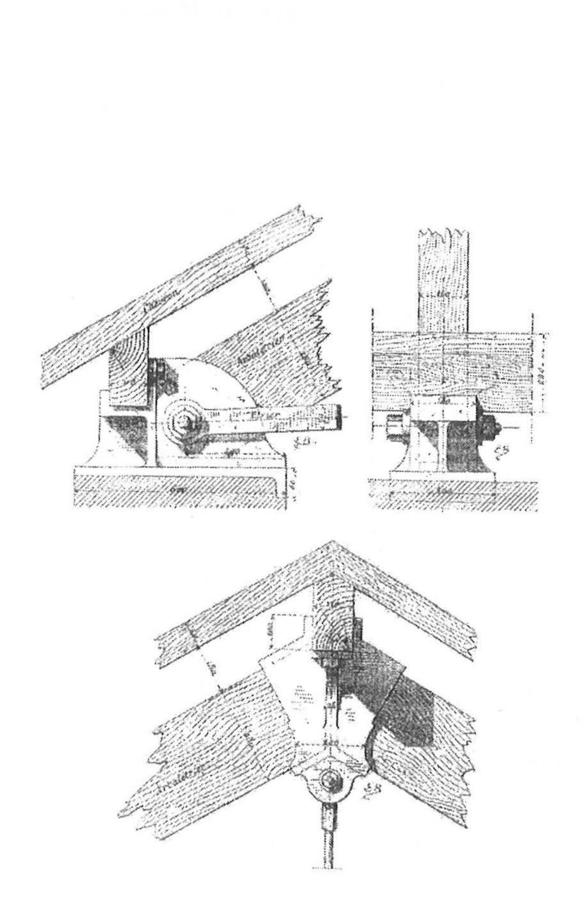


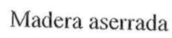




Cercha metálica s.XIX

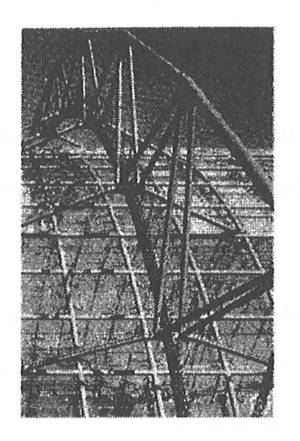
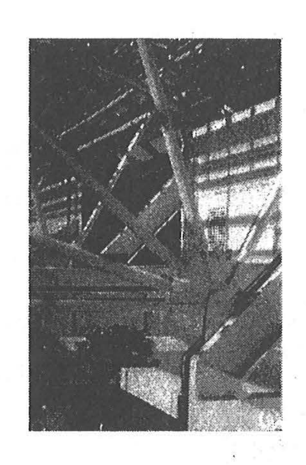
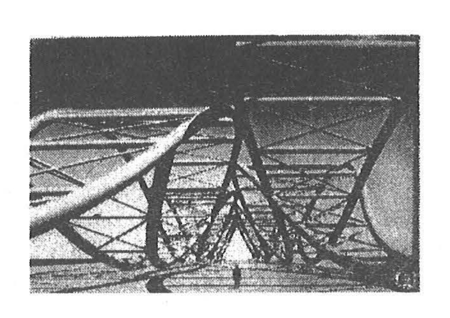
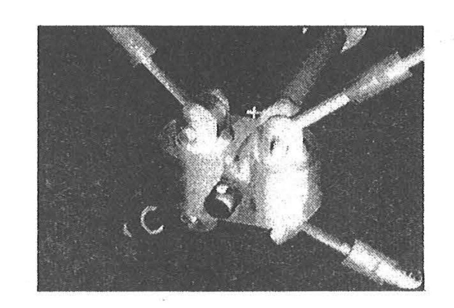
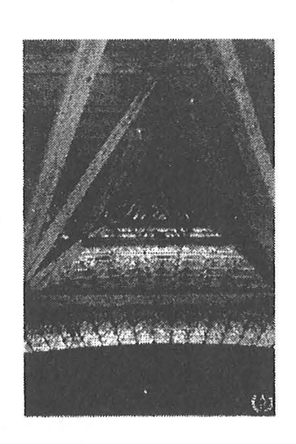
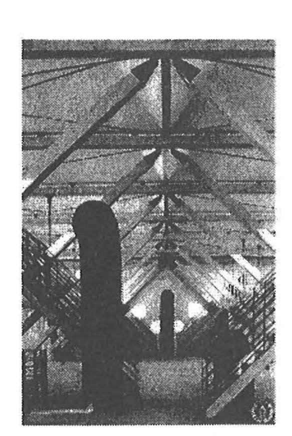
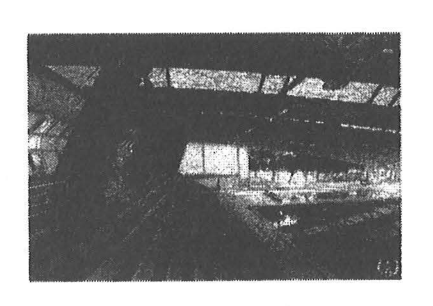
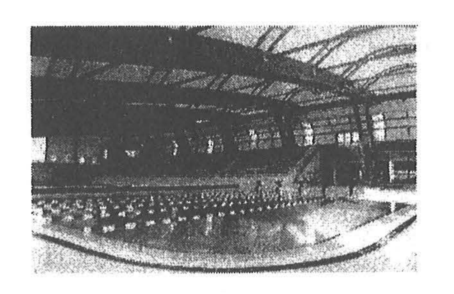






Madera aserrada

Madera laminada

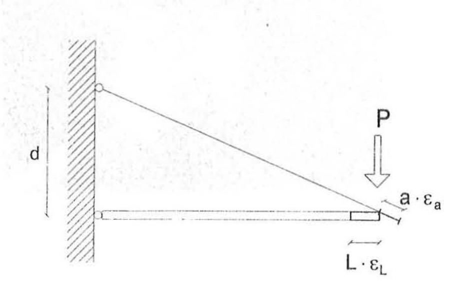









RIGIDEZ

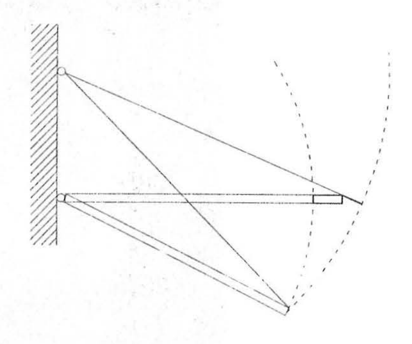
En una estructura triangulada, las barras traccionadas se alargan y las comprimidas se acortan, dando lugar a un cambio de forma de la estructura.

Basta dibujar de nuevo la estructura con las nuevas longitudes de las barras para obtener la geometría deformada y medir la rigidez según el criterio que se haya establecido.

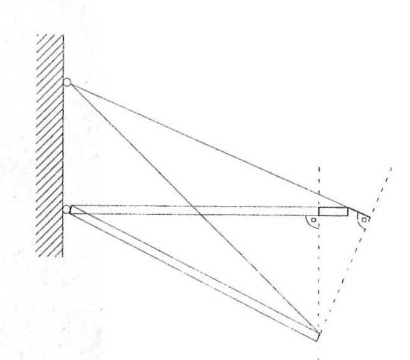
Ejemplo:



$$\varepsilon_a = \frac{N_a}{A_a \cdot E} \qquad \varepsilon_L = \frac{N_L}{A_L \cdot E}$$



Trazado deformada con grandes deformaciones



Trazado convencional para pequeñas deformaciones

CRITERIOS PARA COMPROBAR LA RIGIDEZ

Mientras la resistencia resulta de un criterio objetivo (la estructura se rompe o no se rompe) los criterios de rigidez son más fluidos y dependen no sólo de la estructura sino de otros factores, generalmente la compatibilidad de deformación de la estructura con sistemas estructurales, normalmente cerramientos o compartimentación.

El criterio más usual es el de la **limitación de la flecha relativa**.

$$\frac{\delta}{L} \leq k \cdot 10^{-3}$$

siendo δ el desplazamiento del punto medio (extremo en los voladizos) en la dirección de las fuerzas y L la luz entre apoyos (longitud total en los voladizos)

[la limitación más estricta generalmente empleada es

$$\frac{\delta}{L} \leq 2 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{500} \quad (\frac{\delta}{L} \leq 5 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{250} \text{ en voladizos})$$

que puede llegar a:

$$\frac{\delta}{L} \leq 1 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{1000} \quad (\frac{\delta}{L} \leq 2 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{500} \text{ en voladizos})$$

para el caso de cerramientos especialmente frágiles o con muy escasa capacidad de acomodar deformaciones.

O reducirse a:

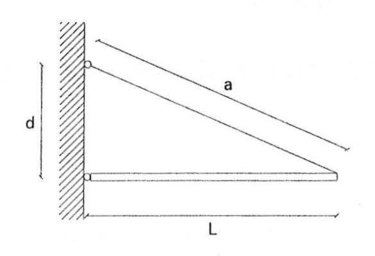
$$\frac{\delta}{L} \leq 4 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{250} \quad (\frac{\delta}{L} \leq 8 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{125} \text{ en voladizos})$$

para el caso de cubiertas ligeras sobre espacios no compartimentados]

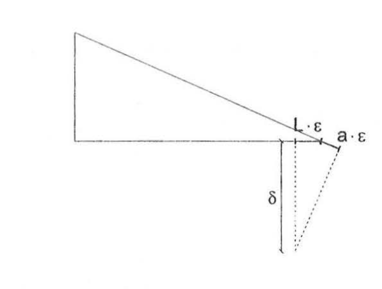
LA MEDIDA DE LA RIGIDEZ

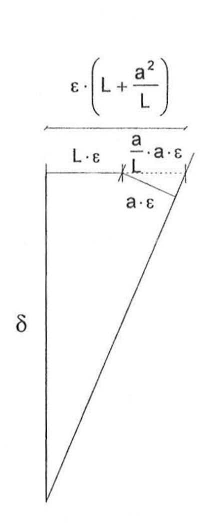
Puede hacerse de varias formas:

- Mediante una deformación geométrica (sólo es posible en estructuras muy simples)



Suponiendo el mismo ε en las dos barras





$$\frac{\delta}{L} = \frac{\varepsilon \cdot \left(L + a^2/L \right)}{d}$$

$$\frac{\delta}{L} = \varepsilon \cdot \left(\frac{L}{d} + \frac{a^2}{L \cdot d} \right)$$

- Aplicando el principio de los trabajos virtuales de la siguiente forma:

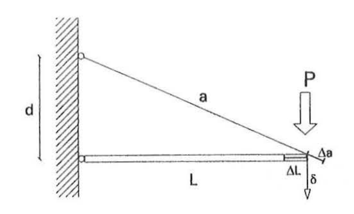
  - En una estructura isostática se calcula fácilmente el cambio de longitud de cada barra $\Delta_j = L_j \cdot \varepsilon_j$ y en su defecto el valor máximo correspondiente a $\varepsilon = \frac{f}{E}$ si

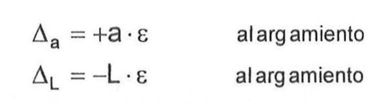
cada barra estuviera dimensionada estrictamente.

- Al dibujar la estructura, de estos cambios de longitud resultará un movimiento δ desconocido en el punto de referencia para la comprobación de la rigidez (punto medio cuando hay dos apoyos, extremo en los voladizos)

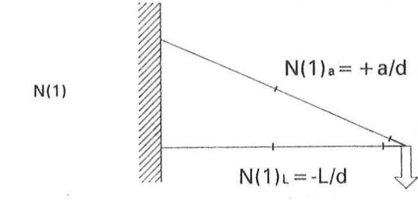
- Colocando una carga virtual 1 en el punto de referencia, en la dirección en que debe medirse δ aparecen unas solicitaciones virtuales $N(1)_j$ en cada una de las barras.

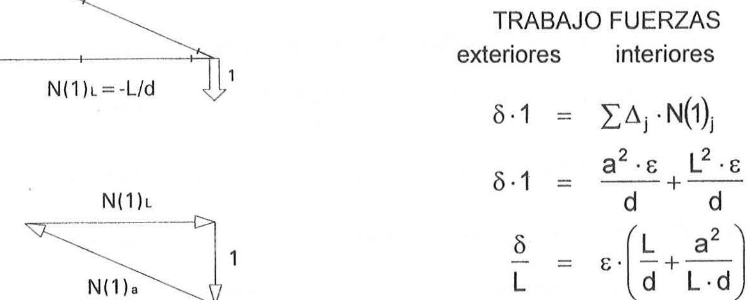
- Aplicando el movimiento real de la estructura (que es obviamente compatible con las condiciones de contorno) el sistema virtual de fuerzas en equilibrio, el trabajo de las fuerzas exteriores es igual al de las fuerzas interiores.





N(1)





TRABAJO FUERZAS

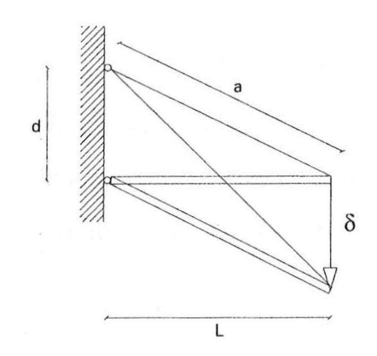
exteriores interiores

$$\delta \cdot 1 = \sum \Delta_j \cdot N(1)_j$$

$$\delta \cdot 1 = \frac{a^2 \cdot \varepsilon}{d} + \frac{L^2 \cdot \varepsilon}{d}$$

$$\frac{\delta}{L} = \varepsilon \cdot \left(\frac{L}{d} + \frac{a^2}{L \cdot d} \right)$$

FACTORES DE LOS QUE DEPENDE LA RIGIDEZ



Tomando la fórmula obtenida anteriormente:

$$\frac{\delta}{L} = \varepsilon \cdot \left(\frac{L}{d} + \frac{a^2}{L \cdot d} \right)$$

y teniendo en cuenta que : $a^2 = L^2 + d^2$ resulta:

$$\frac{\delta}{L} = \varepsilon \cdot \left(\frac{L}{d} + \frac{L}{d} + \frac{d}{L} \right) = \varepsilon \cdot \left(2 \cdot \frac{L}{d} + \frac{d}{L} \right)$$

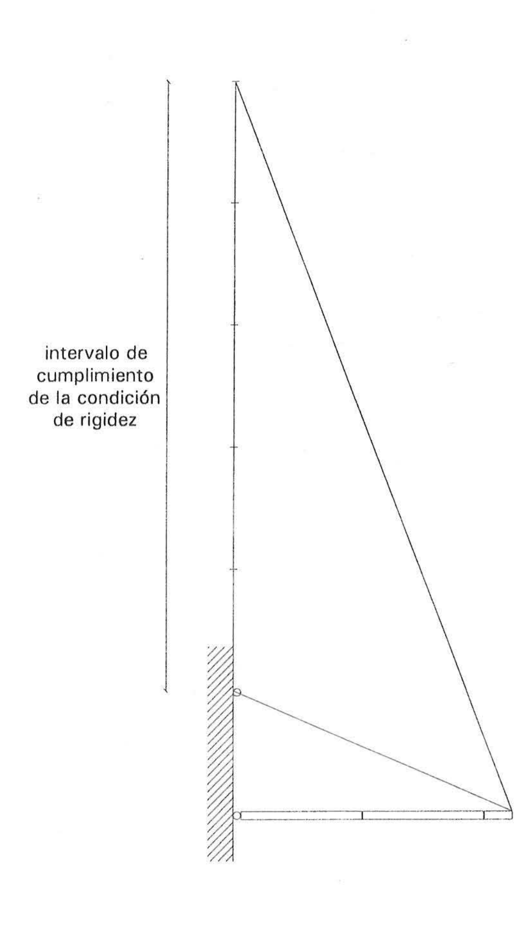
y llamando **esbeltez** $\lambda = \frac{L}{d}$ a la proporción del triángulo que contiene a la estructura:

$$\frac{\delta}{L} = \varepsilon \cdot \left(2 \cdot \lambda + \frac{1}{\lambda} \right)$$

es decir **para un esquema estructural dado la rigidez es únicamente función de la deformación unitaria del material ε y de la proporción λ de la estructura.**

DIMENSIONADO ESTRICTO Y ESBELTEZ LÍMITE

Suponiendo un dimensionado estricto, la deformación unitaria de todas las barras es $\varepsilon = \frac{f}{E}$ (para cualquier caso real, las deformaciones unitarias serán menores, sobre todo en las barras comprimidas) se obtiene el mayor valor posible de la flecha relativa $\frac{\delta}{L}$, igualando este valor al límite de deformación admisible se obtiene la máxima esbeltez del esquema, llamada **esbeltez límite**. Cualquier solución menos esbelta cumplirá sin necesidad de ulteriores comprobaciones la condición de rigidez.



En el caso del ejemplo anterior:

$$\frac{\delta}{L} = \varepsilon \cdot \left(2 \cdot \lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$

se trata de un voladizo: $\dfrac{\delta}{L} \leq \dfrac{1}{250} = 4 \cdot 10^{-3}$

para acero o madera: $\varepsilon \approx 0{,}8 \cdot 10^{-3}$

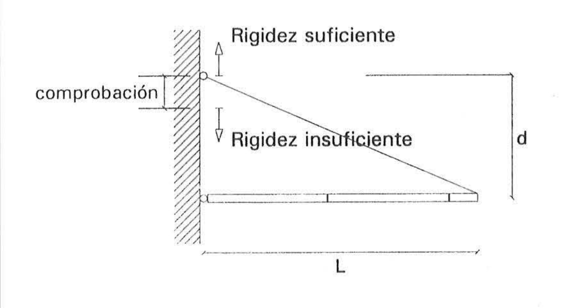
$$4 \cdot 10^{-3} \leq 0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot \left(2 \cdot \lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$5 \leq 2 \cdot \lambda + \frac{1}{\lambda} \qquad 2\lambda^2 - 5\lambda + 1 \geq 0$$

los valores límite de l serán:

$$\lambda_{\text{lím}} = \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{4} = \frac{5 \pm 4{,}1}{4} = \begin{cases} 2{,}28 \\ 0{,}25 \end{cases}$$

cualquier estructura de esbeltez comprendida entre 2,28 y 0,25 cumple con seguridad la condición de rigidez (obviamente los valores límite de esbelteces extraordinariamente pequeños son irrelevantes a efectos prácticos)



para esbelteces $\lambda = \dfrac{L}{d}$ algo por encima de 2,28 o por debajo de 0,25 la rigidez debe ser comprobada.

Para esbelteces que excedan ampliamente los límites no se cumplirá con seguridad la condición de rigidez a no ser que se limite severamente ε, lo que implica que $\sigma << f$ y que por lo tanto no se afecta la capacidad resistente del material

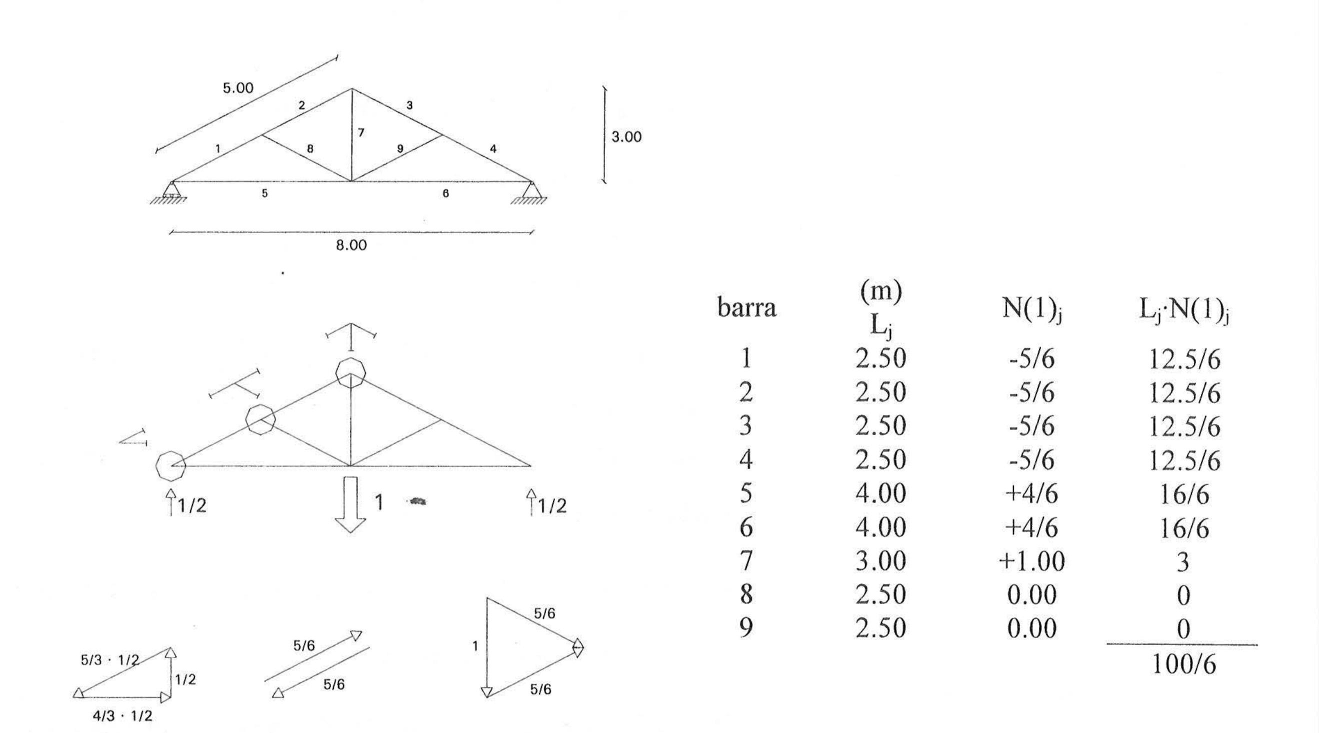
En resumen:

Para un esquema y material dados, si la esbeltez de la estructura es igual o menor que la límite, **el dimensionado es a resistencia, no es preciso comprobar la rigidez.**

Si la esbeltez es algo mayor que la límite es preciso comprobar la rigidez (el sobredimensionado inherente a una estructura real puede comprender la mayor esbeltez hasta un valor de $\lambda \leq 1{,}25 \cdot \lambda_{\text{límite}}$)

Si la esbeltez es claramente mayor que la límite la estructura debe dimensionarse por rigidez (lo que implica necesariamente un elevado consumo de material).

No siempre es cómodo calcular la esbeltez límite de un esquema pero sí lo es calcular la flecha máxima de un caso concreto:



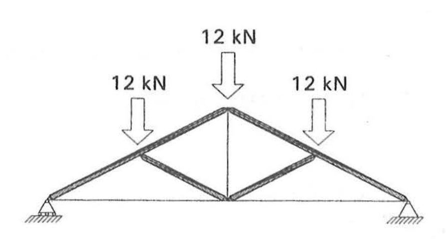
barra	(m) L_j	$N(1)_j$	$L_j \cdot N(1)_j$
1	2.50	-5/6	12.5/6
2	2.50	-5/6	12.5/6
3	2.50	-5/6	12.5/6
4	2.50	-5/6	12.5/6
5	4.00	+4/6	16/6
6	4.00	+4/6	16/6
7	3.00	+1.00	3
8	2.50	0.00	0
9	2.50	0.00	0
			100/6

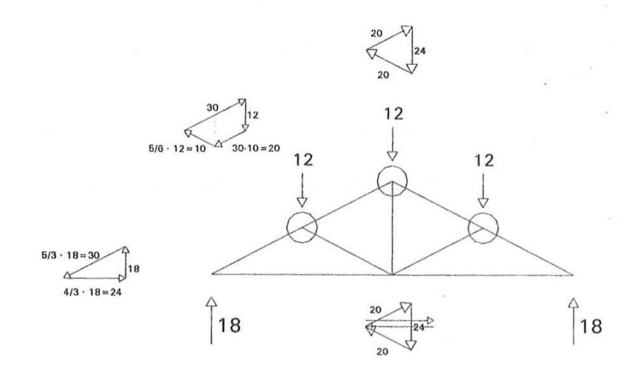
$$\left.\begin{array}{l}\delta \cdot 1 = \sum \Delta_j \cdot N(1)_j \\ \Delta_j = \varepsilon \cdot L_j\end{array}\right\} \frac{\delta}{L} = \frac{1}{L} \cdot \varepsilon \cdot \sum L_j \cdot N(1)_j = \frac{1}{8} \cdot \frac{100}{6} \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3} = 2{,}08 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\delta}{L} = 1{,}62 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{600} < \frac{1}{500}$$

Luego con esta proporción la estructura es deficientemente rígida construida con acero o madera, y puede ser dimensionada por resistencia de las barras.

La comprobación de un caso concreto es muy fácil: suponiendo una cercha en que pares y jabalcones son de madera y tirante y péndola de cable de acero de alta resistencia.





barra	m L_j	kN N_j	mm² A_j	N·mm⁻² σ_j	mm·m⁻¹ ε_j	mm Δ_j	$N(1)_j$	$\Delta_j \cdot N(1)_j$
1	2.50	-30	10000	-3	-0.30	-0.25	-5/6	0.625
2	2.50	-20	10000	-2	-0.20	-0.50	-5/6	0.417
3	2.50	-20	10000	-2	-0.20	-0.50	-5/6	0.417
4	2.50	-30	10000	-3	-0.30	-0.75	-5/6	0.625
5	4.00	+24	5000	+4.8	+0.48	+1.92	+4/6	1.280
6	4.00	+24	5000	+4.8	+0.48	+1.92	+4/6	1.280
7	3.00	+24	5000	+4.8	+0.48	+1.44	+6/6	1.440
8	2.50	-10	5000	-2	-0.20	-0.50	0	0
9	2.50	-10	5000	-2	-0.20	-0.50	0	0
								6.084 mm = δ

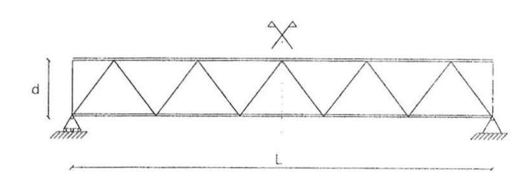
$$\delta = 6{,}1\,\text{mm}$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{1000} << \frac{1}{500}$$

la cercha real es casi el doble de rígida que la dimensionada estrictamente que ya era bastante más rígida de lo preciso.

VIGAS TRIANGULADAS DE CANTO CONSTANTE

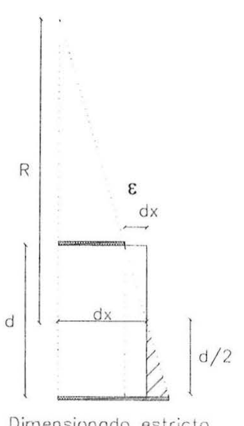
En este tipo de vigas es posible llegar fácilmente a conclusiones de carácter general.



CURVATURA

Si se dimensionan estrictamente los cordones de la viga de la figura y se supone que la triangulación no se deforma:

- El cordón superior se acortará "ε" por unidad de longitud y el inferior se alargará en la misma medida.



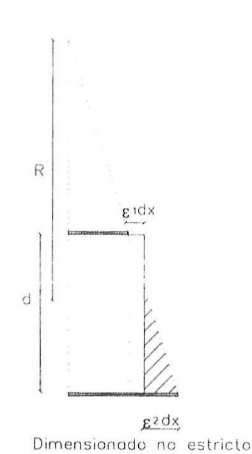
Dimensionado estricto

Si se dan dos cortes a una distancia dx, el efecto de la deformación de los cordones será que los dos planos antes paralelos ahora se cortarán a una distancia R del eje de la viga.

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{dx}{R} = \frac{\varepsilon \cdot dx}{d/2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{R} = \frac{2 \cdot \varepsilon}{d}}$$

R es lo que llamamos **radio** de curvatura **local** y su inversa, 1/R es la **curvatura local**.

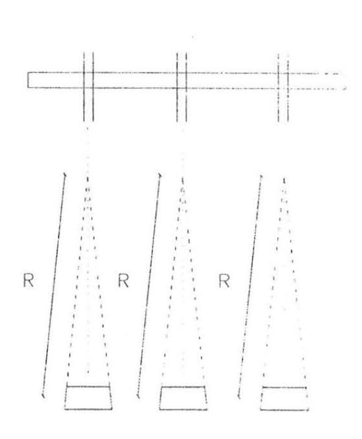


Dimensionado no estricto

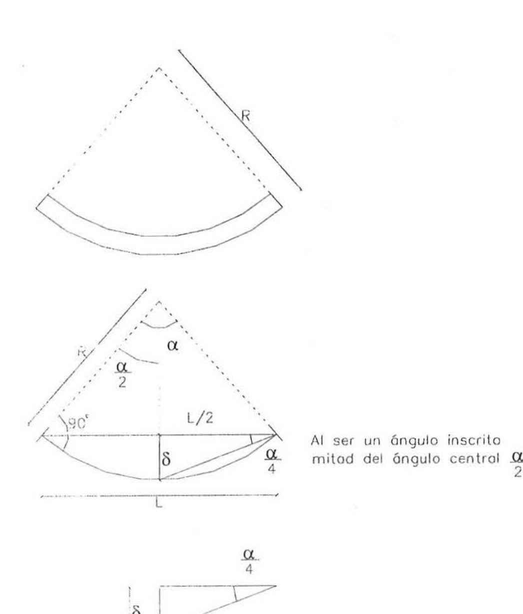
- Si las deformaciones unitarias en los dos cordones fueran distintas:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{d}}$$

- Si el dimensionado de todas las barras es estricto, "ε" es una constante en todos los puntos y la curvatura sería por tanto igual en toda la viga, por lo que la deformada tendría en todos los puntos el mismo radio.



De ello se deduce que la simple intención de dimensionar estrictamente se traducirá en que para cualquier tipo de carga la deformada de una viga de canto constante será un **arco de circunferencia**, lo que permite predecir la flecha relativa mediante una simple construcción geométrica.



$$\frac{\delta}{L/2} = \frac{\alpha}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{L} = \frac{\alpha}{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{L}{R} \\ \dfrac{1}{R} = \dfrac{2 \cdot \varepsilon}{d} \end{array}\right\} \alpha = 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{L}{d} = 2 \cdot \varepsilon \cdot \lambda$$

$$\boxed{\frac{\delta}{L} = \frac{1}{4} \cdot \lambda \cdot \varepsilon}$$

La fórmula permite comprobar que las variables de las que depende la **rigidez** son la **esbeltez** —proporción— λ y la **deformación unitaria** ε.

Con los materiales que habitualmente se usan en estructuras: madera, acero, hormigón armado, $\varepsilon \approx 0{,}8 \cdot 10^{-3}$, de lo que resulta:

$$\delta/L = \frac{1}{4} \cdot \lambda \cdot \varepsilon = \lambda \cdot \mathbf{0{,}2 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{\lambda/5000}$$

Es decir, para: $\lambda = 10$ $\delta/L = 1/500$

$\lambda = 20$ $\delta/L = 1/250$

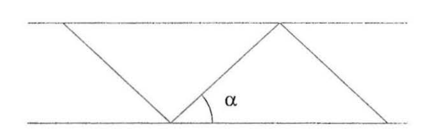
$\lambda = 5$ $\delta/L = 1/1000$

Manejado al revés esto permite establecer una esbeltez límite $\lambda_{\text{lím}}$ en función del nivel de rigidez exigido a la estructura:

$\lambda_{\text{lím}} = 5000 \cdot d/L$

Conocido λ/L, si $\lambda \leq \lambda_{\text{lim}}$, es seguro que la estructura real será como poco igual de rígida y en general más.

DISTORSIÓN

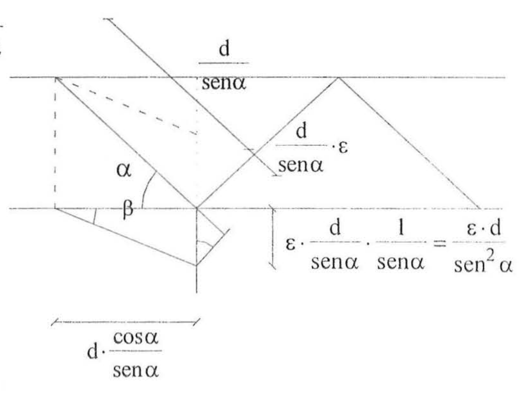


Si se supone que los cordones son muy rígidos se puede calcular el efecto de la deformación de la triangulación.

En una triangulación simétrica:

La deformación produce una pendiente uniforme β:

$$\beta = \frac{\varepsilon \cdot d}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{d \cdot \cos \alpha} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cdot \varepsilon}{2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cdot \varepsilon}{\operatorname{sen} 2 \cdot \alpha}$$

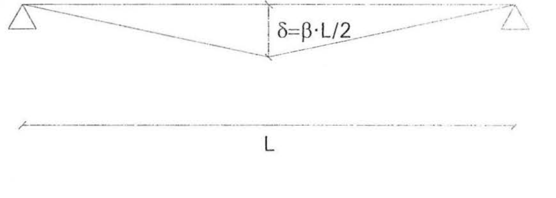


Lo que conduce a una flecha:

$$\delta = \frac{L}{2} \cdot \beta$$

y a una flecha relativa:

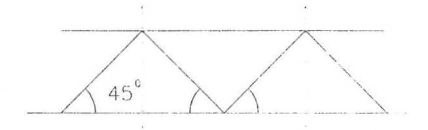
$$\boxed{\frac{\delta}{L} = \frac{\beta}{2} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{sen} 2 \cdot \alpha}}$$



El valor mínimo de ε/L, es decir, la triangulación más rígida, corresponderá al valor de $\alpha = 45^\circ \Rightarrow \operatorname{sen}(2 \cdot \alpha) = 1$

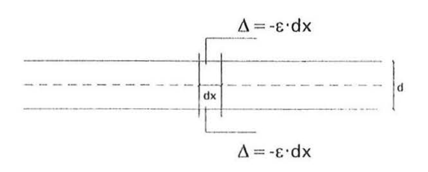
$$\boxed{\delta / L = \varepsilon}$$

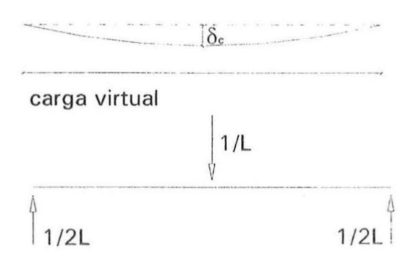
La flecha relativa debida a la distorsión no depende de la proporción general de la viga: sólo es función de la deformación ε bajo carga de servicio y de la pendiente de triangulación α —generalmente el sobredimensionado de la triangulación limita drásticamente la flecha debida a la distorsión, que con frecuencia no se calcula, sino que se estima en 1/3 de la debida a la curvatura para vigas apoyadas—.



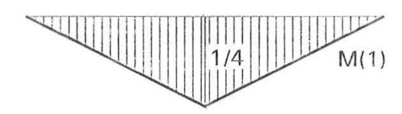
El mismo resultado puede obtenerse de forma más cómoda por aplicación del Principio de Trabajos virtuales, se puede incluso distinguir la flecha debida a la curvatura, δ_c y la debida a la distorsión δ_t

CURVATURA

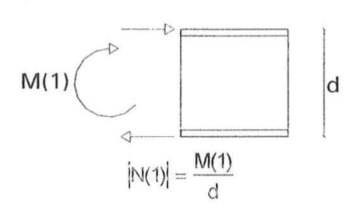




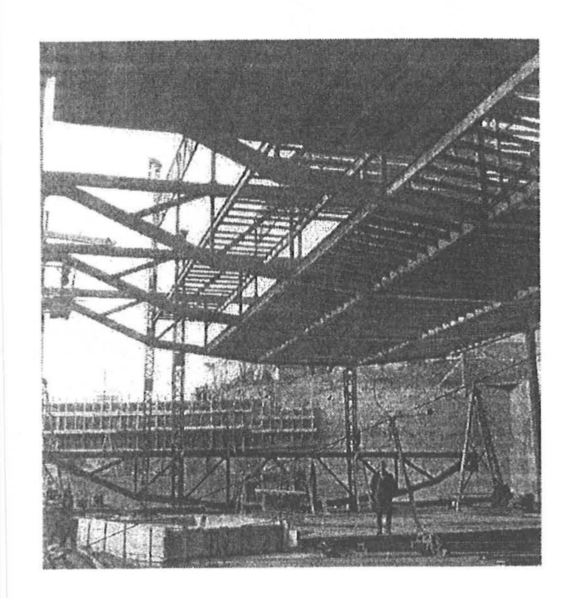
momentos virtuales



solicitaciones virtuales



$$|N(1)| = \frac{M(1)}{d}$$



Suponiendo un dimensionado estricto que da lugar a una deformación unitaria ε:

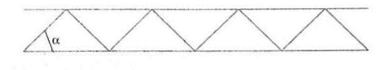
$$\delta \cdot \frac{1}{L} = \int \varepsilon^{+} \cdot N(1)^{+} \cdot dx + \int \varepsilon^{-} \cdot N(1)^{-} \cdot dx =$$

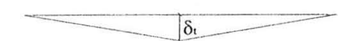
$$= \int 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{M(1)}{d} \cdot dx = \frac{2 \cdot \varepsilon}{d} \cdot \int M(1) \cdot dx$$

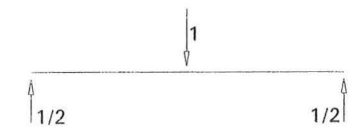
$$\int M(1) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{1}{4} = \frac{L}{8}$$

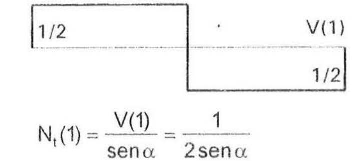
$$\frac{\delta}{L} = \frac{2 \cdot \varepsilon}{d} \cdot \frac{L}{8} = \frac{\varepsilon \cdot \lambda}{4} \qquad \frac{\delta}{L} = \varepsilon \cdot \frac{\lambda}{4}$$

DISTORSIÓN

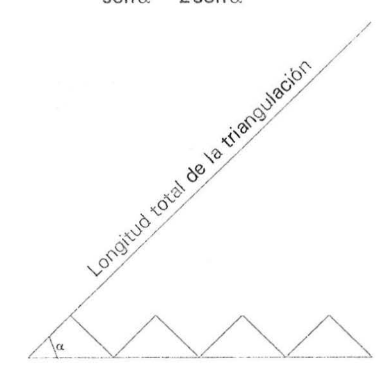








$$N_t(1) = \frac{V(1)}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

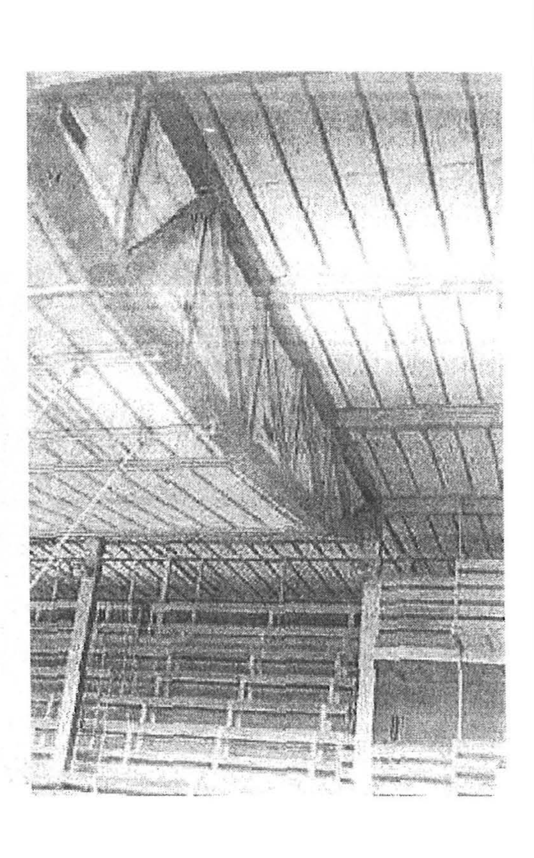


Trabajo fuerzas exteriores — Trabajo fuerzas interiores

$$\delta_t \cdot 1 = \frac{L \cdot \varepsilon}{\cos\alpha} \cdot N(1)$$

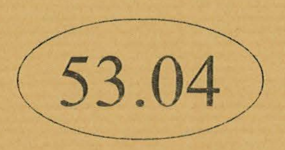
$$\delta_t \cdot 1 = \frac{L \cdot \varepsilon}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sen}\alpha} = \frac{L \cdot \varepsilon}{\operatorname{sen}2 \cdot \alpha}$$

$$\boxed{\frac{\delta_t}{L} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{sen}2\alpha}}$$



Como puede comprobarse, el procedimiento analítico empleando trabajos virtuales es más económico que el gráfico.

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

http://www.aq.upm.es/of/jherrera

info@mairea-libros.com

